

# 中学校数学科

## 2年生

### 5 図形の性質と証明

#### [問題]

中学校

年 組 号 氏名

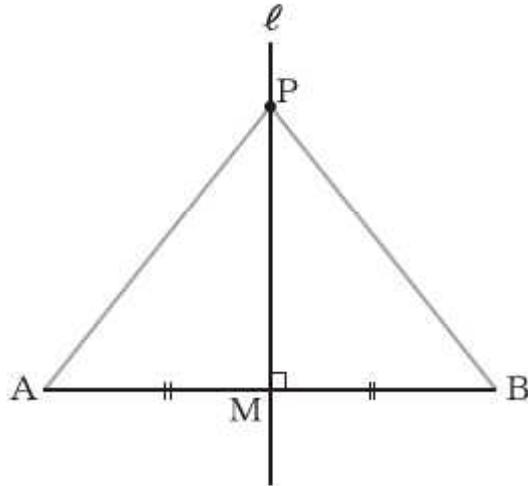
---

 数学的な思考力・判断力・表現力をはぐくむ問題 年 組 号 氏名
 

---

**全国学力・学習状況調査 B問題**

- 1 下の図のように、線分ABの垂直二等分線をひいて、線分ABとの交点をMとします。また、直線  $l$  上に点Pをとります。【H19】



このとき、 $PA = PB$ となることを、下のように証明しましたが、この証明にはまちがいがあります。

**証明**

$\triangle PAM$ と $\triangle PBM$ において、  
仮定から、

$$AM = BM \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$PA = PB \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

また、 $PM = PM$  (PMは共通)  $\dots\dots \textcircled{3}$

①、②、③より、

3辺がそれぞれ等しいから、

$$\triangle PAM \equiv \triangle PBM$$

したがって、 $PA = PB$



## 全国学力・学習状況調査 B問題

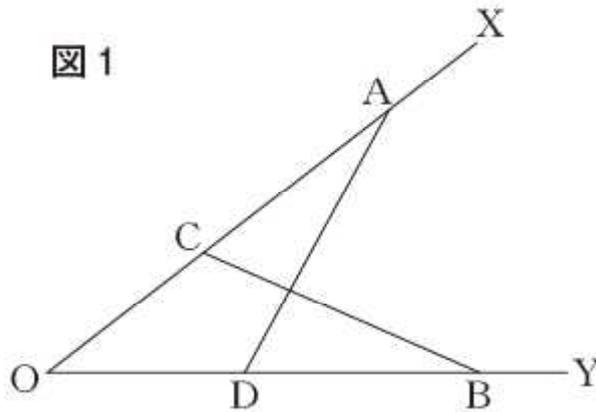
2 拓也さんは、次の問題を考えています。【H20】

## 問題

下の図1のように、 $\angle XOY$ の辺OXと辺OY上に、 $OA = OB$ となるように点Aと点Bを、 $OC = OD$ となるように点Cと点Dを、それぞれとります。

点Aと点D、点Bと点Cをそれぞれ結ぶとき、 $AD = BC$ となることを証明しなさい。

図1

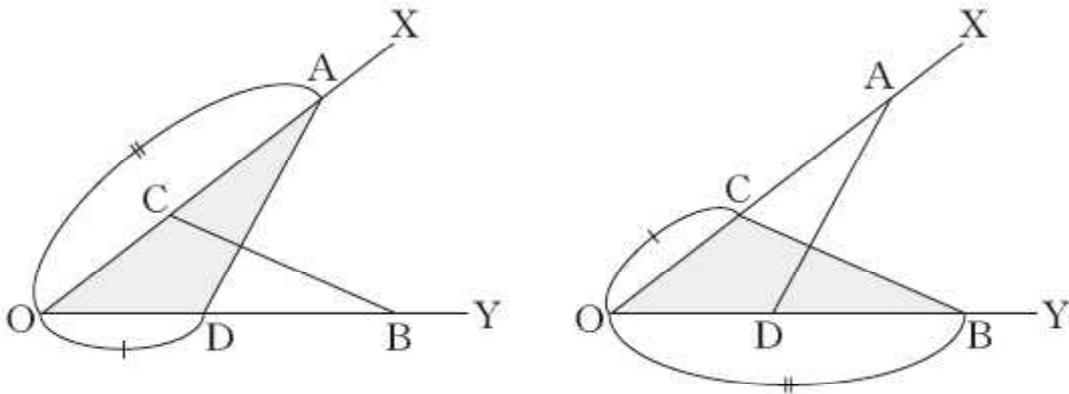


拓也さんは、証明の方針を下のようなメモにまとめました。

### 拓也さんのメモ

①  $AD = BC$  を証明するためには、 $\triangle AOD$  と  $\triangle BOC$  の合同を示せばよい。

② 図1の $\triangle AOD$ と $\triangle BOC$ を見やすくするために、2つの図に分けて、仮定を表すと、下のようになる。



③ ②をもとにすると、 $\triangle AOD$ と $\triangle BOC$ の合同が示せそうだ。

次の(1)から(3)までの各問いに答えなさい。

(1) 拓也さんのメモの ① にあるように、 $AD = BC$ を証明するために、 $\triangle AOD$ と $\triangle BOC$ の合同を示せばよいのは、合同な図形のどのような性質からですか。下のアからエの中から1つ選びなさい。

ア 合同な図形の対応する辺の長さは等しい。

イ 合同な図形の対応する角の大きさは等しい。

ウ 合同な図形の周の長さは等しい。

エ 合同な図形の面積は等しい。

(2) 前ページの問題で、 $AD = BC$ となることを証明しなさい。

(3) 拓也さんは、 $AD = BC$ を、 $\angle AOD = \angle BOC$ をもとにして証明しました。

$\angle AOD = \angle BOC$ をもとにすると、前ページの問題の図形について、 $AD = BC$ 以外に新しいことが分かります。それを下のアからエの中から1つ選びなさい。

ア  $OC = OD$

イ  $OC = BD$

ウ  $\angle OAD = \angle OBC$

エ  $\angle OAD = \angle BOC$

---

 数学的な思考力・判断力・表現力をはぐくむ問題 年 組 号 氏名
 

---

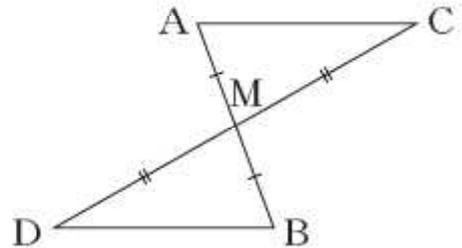
**全国学力・学習状況調査 B問題**

3 大貴さんは、次の問題を考えています。【H21】

**問題**

右の図のように、線分ABと線分CDがそれぞれの中点Mで交わっています。

このとき、 $AC \parallel DB$ となることを証明しなさい。



次の(1)から(3)までの各問いに答えなさい。

- (1) 大貴さんは、次のような証明の方針1を考えました。この証明の方針1にもとづいて、 $AC \parallel DB$ となることの証明を完成しなさい。

証明の方針1

- ①  $AC \parallel DB$ を証明するためには、 $\angle MAC = \angle MBD$ (錯角が等しい)を示せばよい。
- ②  $\angle MAC = \angle MBD$ を示すためには、 $\triangle AMC \equiv \triangle BMD$ を示せばよい。
- ③ 仮定の  $AM = BM$ ,  $CM = DM$  を使うと、 $\triangle AMC \equiv \triangle BMD$  が示せそうだ。

## 証明

$\triangle AMC$  と  $\triangle BMD$  において,



合同な三角形の対応する角は等しいから,

$$\angle MAC = \angle MBD$$

したがって, 錯角が等しいから,

$$AC \parallel DB$$

- (2) 大貴さんは,  $\triangle AMC$   $\triangle BMD$  をもとにして  $AC \parallel DB$  を証明しました。  
 $\triangle AMC$   $\triangle BMD$  をもとにすると, 前ページの問題の図形について,  
 $\angle MAC = \angle MBD$  や問題の仮定以外にも分かることがあります。それを下のアからエの中から 1 つ選びなさい。

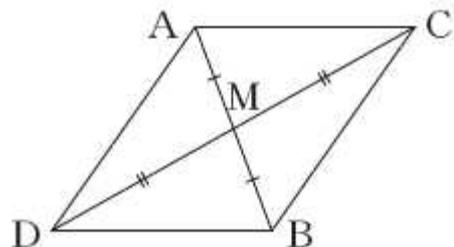
ア  $\angle MCA = \angle MDB$

イ  $\angle MAC = \angle MDB$

ウ  $AM = BM$

エ  $AM = DM$

- (3) 右の図のように, 線分  $AD$ , 線分  $CB$  をひいて四角形  $ADBC$  をつくと, 次の証明の方針 2 を考えることもできます。



## 証明の方針2

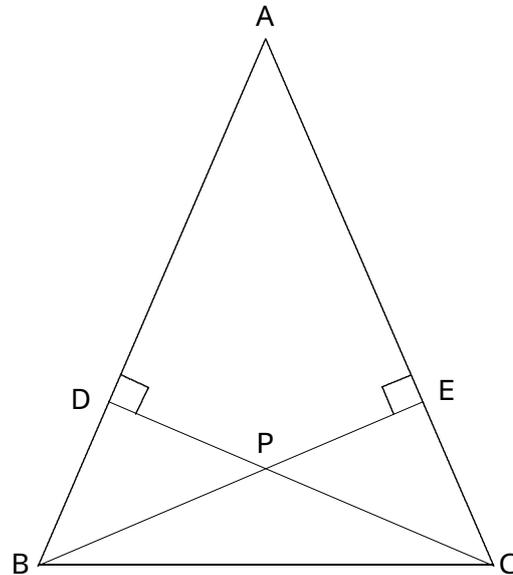
- ①  $AC \parallel DB$ を証明するためには、四角形ADBCが  
( ① )であることを示せばよい。
- ② このことは、仮定の $AM = BM$ ,  $CM = DM$ を使うと、  
 ②  ことから示せる。

証明の方針2の( )に当てはまる言葉を書きなさい。また、 に当てはまること  
とがらを、下のアからオの中から1つ選びなさい。

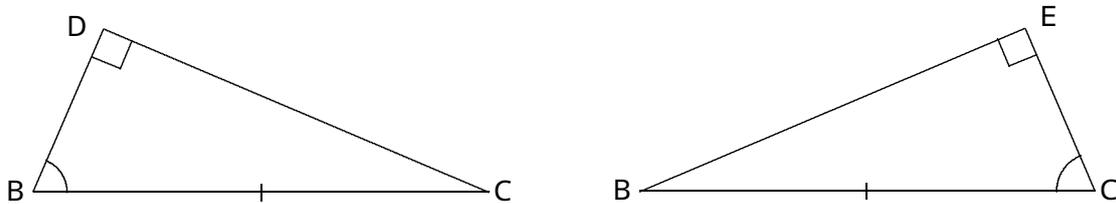
- ア 対角線が垂直に交わる
- イ 対角線の長さが等しい
- ウ 対角線が平行である
- エ 対角線がそれぞれの中点で交わる
- オ 対角線が垂直に交わり、その長さが等しい

## 練習問題

- 1  $AB = AC$ の二等辺三角形 $ABC$ で、 $C$ から $AB$ に垂線をひき $AB$ との交点を $D$ 、同様に $B$ から $AC$ に垂線をひき $AC$ との交点を $E$ とします。また、 $CD$ と $BE$ の交点を $P$ とします。このとき、 $CD = BE$ であることを証明します。あとの問いに答えなさい。



- (1)  $DBC$ と $ECB$ に着目して証明することにしました。



まず、辺や角が等しいものを書き出してみました。

辺について………  $BC$ は共通

角について………  $CDB = BEC = 90^\circ$

・二等辺三角形の底角は等しいから、 $DBC = ECB$

このことを参考に、証明を完成させなさい。

(2) (1)とは別の三角形に着目して、証明することにしました。ACDと ABEに着目して、 $CD = BE$ であることを証明しなさい。

(3) この問題で、 $CD = BE$ は常にいえることが分かりました。このこと以外で、他のすべての二等辺三角形ABCでもいえることを、次のアからオの中から1つ選びなさい。

ア PはCD, BEのそれぞれの中点である。

イ CDとBEはそれぞれ Bと Cの二等分線である。

ウ ACDと ABEは直角二等辺三角形である。

エ DBPと ECPは二等辺三角形である。

オ PBCは二等辺三角形である。

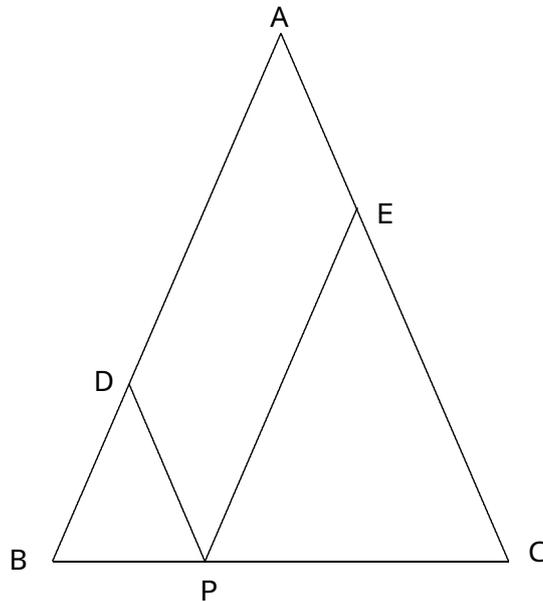
---

 数学的な思考力・判断力・表現力をはぐくむ問題 年 組 号 氏名
 

---

### 練習問題

- 2  $AB = AC$ の二等辺三角形 $ABC$ で、辺 $BC$ 上に点 $P$ をとり（頂点 $B, C$ とは異なるものとします）、 $P$ を通過して $AC$ に平行な線をひいて $AB$ と交わる点を $D$ 、 $P$ を通過して $AB$ に平行な線をひいて $AC$ と交わる点を $E$ とします。あとの問いに答えなさい。



- (1) 太郎さんは、 $DBP$ が二等辺三角形になることを証明しました。証明を完成させなさい。



DBPで、 $DP \parallel AC$ より、  
同位角が等しいので、  
 $\angle DPB = \angle C$  ……



(2) 花子さんは、四角形ADPEが平行四辺形になることを証明しました。証明を完成させなさい。



四角形ADPEで、仮定より、  
 $DP // AE$  .....



(3) 太郎さんと花子さんは、お互いの証明を見て、あることに気付きました。2人の証明から分かることで、正しいものを次のアからオの中から1つ選びなさい。

ア 点Pのとり方によらず、四角形ADPEはひし形になる。

イ 点PがBCの中点のときは、2つの三角形、DBPとEPCは正三角形になる。

ウ いつも四角形ADPEの面積は、DBPとEPCの面積の和になる。

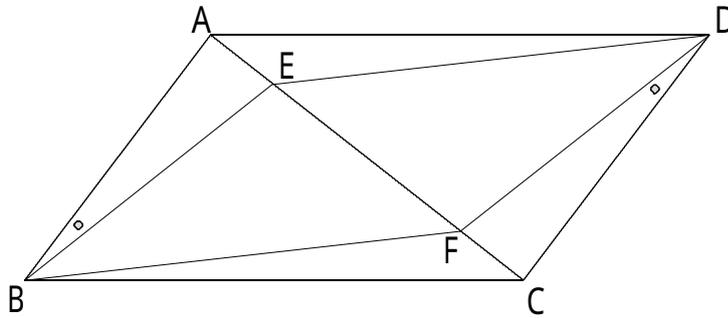
エ いつも四角形ADPEの周の長さは、ABの長さの2倍になる。

オ いつも四角形ADPEの周の長さと、ABCの周囲の長さは等しくなる。

## 練習問題

3 けいたさんとかりんさん、たくみさんは、次の問題を考えています。

下の図のような平行四辺形 $ABCD$ で、 $\triangle ABE = \triangle CDF$ ならば  
四角形 $EBFD$ は平行四辺形であることを証明しなさい。



下の(1)から(3)の各問いに答えなさい。



まず、 $\triangle ABE$ と  $\triangle CDF$ が合同であることを証明しよう。

それができたら、 $BE = DF$ が成り立つことが分かるわ。



(1)  $\triangle ABE$ と  $\triangle CDF$ が合同であることを証明しなさい。



次に， AEDと CFBが合同であることを証明しよう。



それもできたら， ED = FBが成り立つことが分かるね。



AEDと CFBが合同であることを証明するのに，  
下のア，イが分からないなよ。



大丈夫よ， ABE CDFから，新しく分かることがあるわ。

(2) けいたさんは， AEDと CFBが合同であることを，次のように証明しました。

【証明】

|            |   |       |
|------------|---|-------|
|            | AEDと CFBで   |       |
| ABCDより，    | DA = BC   | ..... |
| AD//BCより，  | DAE = BCF   | ..... |
| ABE CDFより， | <div style="border: 1px dashed black; padding: 5px; display: inline-block;">ア</div> | ..... |
| ， ， より     | <div style="border: 1px dashed black; padding: 5px; display: inline-block;">イ</div> |       |
| したがって      | AED CFB   |       |
|            | ED = FB   |       |

上のア，イにあてはまる記号や言葉を書きなさい。

(3) たくみさんは、上の問題を次のように考えました。



ABEとCDFの合同を証明し、 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$ より新しく分かることから利用すると、 $\angle BEF = \angle DFE$ が成り立つことがいえるよ。

たくみさんの考え方より、四角形EBFDは平行四辺形になることが分かります。下の平行四辺形になる条件のどの条件を利用していますか、アからオの中から、記号で選びなさい。

- ア 2組の向かい合う辺が、それぞれ平行であるとき
- イ 2組の向かい合う辺が、それぞれ等しいとき
- ウ 2組の向かい合う角が、それぞれ等しいとき
- エ 対角線がそれぞれの中点で交わる時
- オ 1組の向かい合う辺が等しくて平行であるとき

# 中学校数学科

## 2年生

### 5 図形の性質と証明

#### [解答]

中学校

年 組 号 氏名

## 全国学力・学習状況調査 B問題

1

- (1) の  $PA = PB$  は条件ではないので、証明の中で使うことはできない。

$PAM$  と  $PBM$  において、

仮定から、

$$AM = BM \quad \dots\dots$$

$$\underline{PA = PB} \quad \dots\dots$$

また、  $PM = PM$  ( $PM$  は共通)  $\dots\dots$

, , より、

3辺がそれぞれ等しいから、

$$PAM = PBM$$

したがって、  $PA = PB$

- (2) 正しい証明は次のとおり。

$PAM$  と  $PBM$  において、

仮定から、

$$AM = BM \quad \dots\dots$$

線分  $AB$  の垂直二等分線が だから、

$$\angle PMA = \angle PMB = 90^\circ \quad \dots\dots$$

また、  $PM = PM$  ( $PM$  は共通)  $\dots\dots$

, , より、

2辺とその間の角がそれぞれ等しいから、

$$PAM \cong PBM$$

したがって、  $PA = PB$

## 全国学力・学習状況調査 B問題

2

(1)  $AD$ 、 $BC$ は三角形の1辺の長さであるから、アが導き出される。

答え ア

(2)  $AOD$ と  $BOC$ で、

仮定から  $AO = BO$  ……

$OD = OC$  ……

共通な角だから、

$\angle AOD = \angle BOC$  ……

、 、 より、

2辺とその間の角がそれぞれ等しいから、

$\triangle AOD \cong \triangle BOC$

合同な図形において、対応する辺の長さは等しいから、

$AD = BC$

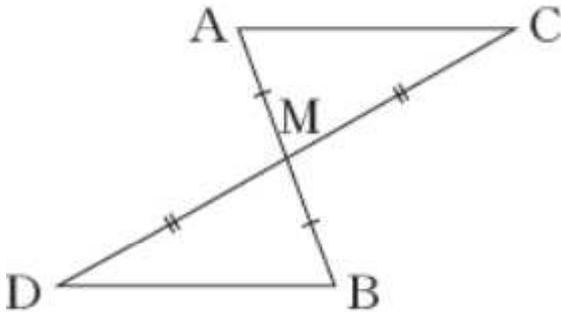
(3) 辺についてはすべて分かっている。対応する角の大きさが等しいことを式に表しているのはウである。

答え ウ

## 全国学力・学習状況調査 B問題

3

(1)



【証明】

AMCと BMDにおいて、

仮定より  $AM = BM$  .....

$CM = DM$  .....

対頂角は等しいので、

$\angle AMC = \angle BMD$  .....

、 、 より、

2辺とその間の角がそれぞれ等しいので、

$\triangle AMC \cong \triangle BMD$

合同な三角形の対応する角の大きさは等しいから、

$\angle MAC = \angle MBD$

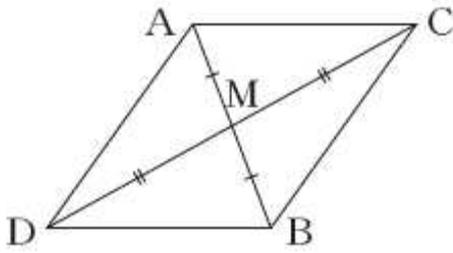
したがって、錯角が等しいから、

$AC \parallel DB$

(2) (1)の仮定や結論以外で分かることは、選択肢の中からは、 $\angle MCA = \angle MDB$ だけである。

答え ア

(3)



四角形ADBCが平行四辺形ならば $AC \parallel DB$ がいえる。  
 $AM = BM$ ,  $CM = DM$ が分かっているので、四角形ADBC  
において、対角線がそれぞれの中点で交わっている。  
よって、四角形ADBCは平行四辺形である。

答え .....平行四辺形  
.....工

## 練習問題

1

- (1)
- $\triangle DBC$
- と
- $\triangle ECB$
- に着目して証明する。

【証明】

$\triangle DBC$ と  $\triangle ECB$ で、  
 $\angle CDB = \angle BEC$  .....  
 $\triangle ABC$ は  $AB = AC$ の二等辺三角形だから、底角は等しいので、  
 $\angle DBC = \angle ECB$  .....  
 共通な辺だから、  
 $BC = CB$  .....  
 , , より、  
 直角三角形の斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しいので、  
 $\triangle DBC \cong \triangle ECB$   
 よって、  
 $CD = BE$

- (2)
- $\triangle ACD$
- と
- $\triangle ABE$
- に着目して証明する。

【証明】

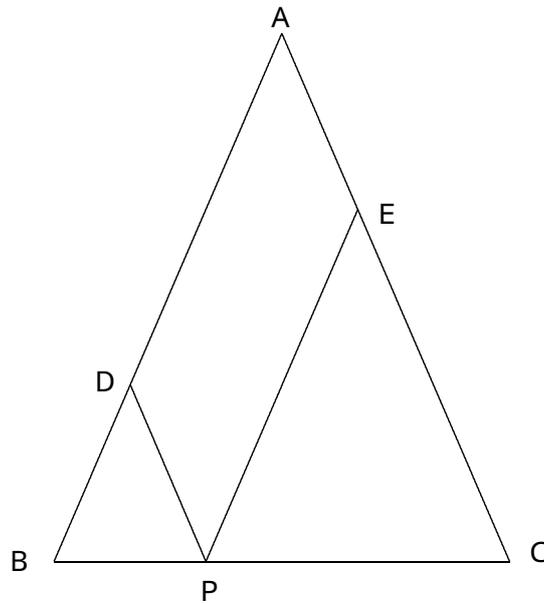
$\triangle ACD$ と  $\triangle ABE$ で、  
 $\angle CDA = \angle BEA = 90^\circ$  .....  
 $\triangle ABC$ は二等辺三角形だから、  
 $AC = AB$  .....  
 共通な角だから、  
 $\angle A = \angle A$  .....  
 , , より、  
 直角三角形の斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しいので、  
 $\triangle ACD \cong \triangle ABE$   
 よって、  
 $CD = BE$

- (3) (1), (2)の証明から、
- $\angle BCD = \angle CBE$
- がいえるので、
- $\triangle PBC$
- は二等辺三角形である。

答え オ

## 練習問題

2



(1) 証明は次の通り。

DBPで、 $DP \parallel AC$ より同位角が等しいので、  
 $DPB = C$  ……

ABCは二等辺三角形より、底角は等しいので、  
 $C = B$  ……

, より

$$DPB = B$$

よって、DBPは二等辺三角形になる。

(2) 証明は次の通り。

四角形ADPEで、仮定より、  
DP//AE .....

また、  
EP//AD .....

、より、2組の向かい合う辺がそれぞれ平行だから、  
四角形ADPEは平行四辺形である。

(3) 2つの三角形、DBPとEPCは二等辺三角形で、四角形ADPEは平行四辺形より、次のことがいえる。

$$\begin{aligned} \text{ADPEの周の長さ} &= 2 \times (\text{AD} + \text{DP}) \\ &= 2 \times (\text{AD} + \text{DB}) \\ &= 2 \times \text{AB} \end{aligned}$$

答え 工

## 練習問題

3

(1) 証明は次のとおり。

|           |                                     |       |
|-----------|-------------------------------------|-------|
|           | ABEと CDFで                           |       |
| 仮定より      | $\angle ABE = \angle CDF$           | ..... |
| ABCDより,   | $AB = CD$                           | ..... |
| AB//CDより, | $\angle BAE = \angle DCF$           | ..... |
| , , より,   | 1辺とその両端の角がそれぞれ等しいので,                |       |
|           | $\triangle ABE \cong \triangle CDF$ |       |
| よって,      | $BE = DF$                           |       |

(2) 答えは次のとおり。

答え ア.....  $AE = CF$ , イ..... 2辺とその間の角がそれぞれ等しいので

(3) 証明は次のとおり。

|   |                           |       |
|---|---------------------------|-------|
| $\triangle ABE \cong \triangle CDF$ より, | $BE = DF$                 | ..... |
|   | $\angle BEA = \angle DFC$ | ..... |
| と4点A, E, F, Cは一直線より,                    | $\angle BEF = \angle DFE$ | ..... |
| より, 錯角が等しいので,                           | $BE \parallel DF$         | ..... |
| , より, 1組の向かい合う辺が等しくて平行なので,              | 四角形EBFDは, 平行四辺形である。       |       |

答え オ

# 中学校数学科

## 2年生

### 5 図形の性質と証明

[指導に当たって(教師用)]

---

 数学的な思考力・判断力・表現力をはぐくむ問題
 

---

## 全国・学力状況調査 B問題

## 【指導に当たって】

|            |   |
|------------|---|
| 学年         | 2年  |
| 単元         | 2 - 5 図形の性質と証明  |
| 問題<br>のねらい | 1 図形についての証明を読み，次のことができるかどうかを見る。<br>・証明を振り返って評価すること<br>・評価に基づいて証明を改善すること           |
|            | 2 証明の方針を読み，次のことができるかどうかを見る。<br>・筋道を立てて考えること<br>・方針に基づいて証明すること<br>・証明を振り返って考えること   |
|            | 3 証明の方針を読み，次のことができるかどうかを見る。<br>・方針に基づいて証明すること<br>・証明を振り返って考えること<br>・別の証明の方針を立てること |

## 1 証明の評価・改善（垂直二等分線の性質の証明）

- (1) 命題の結論は，証明で根拠として用いることができないことを理解できるよう指導することが大切である。

そのためには，日常生活での経験や数学の簡単な命題で根拠を問う例を取り上げることが考えられる。

例えば，「雨が降ったから運動会は中止になった。」において，「運動会が中止になった」根拠は「雨が降ったから」であり，「運動会が中止になったから」ではない。また，「二等辺三角形の底角は等しい。」において，「底角が等しい」根拠は「二等辺三角形だから」であり，「底角が等しいから」ではない。このような事例と照らし合わせながら，結論を根拠として用いられないことを理解できるようにすることが考えられる。

また，証明における仮定と結論を理解し，それらを区別できるようにすることも大切である。

例えば，問題の条件から生徒自身が図をかくことを通して，分かっている事柄と，分かっていない事柄を理解することが考えられる。その際，それらを図の中で印や色を変えて区別することも有効である。

- (2) 証明の学習において，不十分な証明や誤った証明を基に，その証明の不十分なところや誤りを指摘し，よりよい記述や正しい表現の仕方について考え，証明を改める活動を取り入れるよう指導することが大切である。

本問題のように結論を根拠として用いている誤った証明を取り上げ，話し合いを通して生徒がよりよい証明に改める場を設けることが考えられる。

三角形の合同条件と命題の仮定を対比し、見通しをもって証明を構想できるようにすることも大切である。そうすることで、誤りを防ぐことができると考えられる。

例えば、合同であることを示したい2つの三角形を見だし、どの合同条件が使えるそうか、そのためには、どの辺やどの角の相等を示せばよいのかについて明らかにすることで、見通しをもつことができると考えられる。

## 2 方針に基づく証明（重なりのある2つの三角形）

### (1) 証明の方針を立てることができるよう指導することが大切である。

証明の学習においては、はじめに、証明を構想することが大切である。証明を構想する段階では、結論を導くために何が必要であるかを明らかにしたり、与えられた条件を整理したり、着目すべき性質や関係を見いだしたりするなどして、証明の方針を立てることが必要である。

指導に当たっては、本問題の「拓也さんのメモ」のように、証明の方針を立てる活動を取り入れることが大切である。結論 $AD = BC$ を導くために、 $\triangle AOD$ と $\triangle BOC$ を示せばよいことを明らかにしたり、 $\triangle AOD$ と $\triangle BOC$ について分かっていることを図を用いて整理したり、合同を示すために必要な関係 $\angle AOD = \angle BOC$ を見いだしたりするなどして、方針を立てることが考えられる。

### (2) 方針に基づいて証明を書けるよう指導することが大切である。

証明の学習では、立てられた方針を基に、証明を書くことが求められる。ここでは、正しいと認められる事柄を数学の記号で表したり、これらが成り立つ根拠を記述したりして、仮定から結論を導く推論の過程を的確に表現することが必要である。

指導に当たっては、立てられた方針に基づいて、生徒なりに筋道立てて説明する活動から始めることが大切である。その上で、次第に形式を整えて証明を書くことができるようにしていく必要がある。

例えば、設問(2)のように、メモで提示された方針に基づいて証明を書く活動や自分たちで書いた証明について互いに見直したり評価したりして、的確で分かりやすい書き方を工夫する活動を取り入れることが有効である。

### (3) 証明を振り返り、新たな性質を見いだすことができるよう指導することが大切である。

証明や説明を読み、その結果や過程を振り返り、新たな性質を見いだすことが大切である。

例えば、次のように、三角形の合同を用いる証明をした後に、その過程を振り返ることで、図形についての新たな性質を見いだすことができる。

## 3 証明の方針(中点で交わる2つの線分)

- (1) 証明の方針を立てることができるように指導することが大切である。

証明の学習においては、はじめに、証明を構想することが大切である。証明を構想する際には、結論を導くために何が必要であるかを明らかにしたり、与えられた条件を整理したり、着目すべき性質や関係を見いだしたりするなどして、証明の方針を立てる必要がある。そうすることで、見通しをもって証明をかくことができるようになる。

指導に当たっては、本問題に示した証明の方針1, 2のように、結論から仮定、仮定から結論の両方向から考えて、証明の方針を立てる活動を取り入れることが大切である。

例えば、本問題で、結論を導くために示せばよい事柄として、「錯角が等しい」、「同位角が等しい」、「平行四辺形の対辺である」などから、どれを選択するかを検討する活動を取り入れることが考えられる。また、仮定から  $\triangle AMC$  と  $\triangle BMD$  や四角形  $AMBD$  について分かることを整理し、例えば、 $\triangle AMC \cong \triangle BMD$  を示すために、必要となる条件を見いだす活動を取り入れることが考えられる。

- (2) 方針に基づいて証明を書けるよう指導することが大切である。

証明の学習においては、方針を立て、それに基づいて証明を書くことが大切である。ここでは、方針に示された事柄を数学の記号で表したり、これらが成り立つ根拠を明らかにしたりしながら、仮定から結論を導く推論の過程を的確に証明として表現することが必要である。

また、このことによって、筋道立てて説明し伝え合う活動を充実させることもできる。指導に当たっては、証明に用いる事柄について立てた方針を参照しながら証明に用いるものを整理し、その事柄の根拠を明らかにして証明を書く活動を取り入れることが大切である。

例えば、設問(1)で、方針を参照しながら、証明として書く順序を検討したり、実際に書いた証明を方針と照らし合わせて、示すべきことが示されているかなどを確認したりする場を設定することが大切である。

また、「 $AM = BM, CM = DM, \triangle AMC \cong \triangle BMD$ 」だけでなく、それらの根拠として「仮定から」や「対頂角は等しいので」を示すことや、「 $\triangle AMC \cong \triangle BMD$ 」だけでなく、その根拠として「2辺とその間の角がそれぞれ等しいから」を示すことができるようにすることが大切である。

その際、次第に形式を整えて証明を書くことができるようにするために、自分たちで書いた証明について互いに見直したり評価したりして、的確で分かりやすい書き方を工夫する活動を取り入れることが有効である。

- (3) 証明を振り返り、新たな性質を見いだすことができるよう指導することが大切である。

証明の学習においては、与えられた性質の証明をするだけでなく、その結果や過程を振り返り、新たな性質を見いだすことが大切である。そのためには、証明を書くことだけでなく、証明を読むことが必要である。そうすることで、数や図形の性質などを見いだし発展的に考える活動に意欲的に取り組むことにつながる。

指導に当たっては、証明の過程で現れた事実や得られた結論に着目し、新たな性質を見付けることができないかを考える機会を設けることが大切である。

例えば、次のように、三角形の合同を用いる証明をした後に、その過程を振り返り、図形についての新たな性質を見いだす場を設定することが考えられる。