

中学校数学科

2年生

5 図形の性質と証明

[問題]

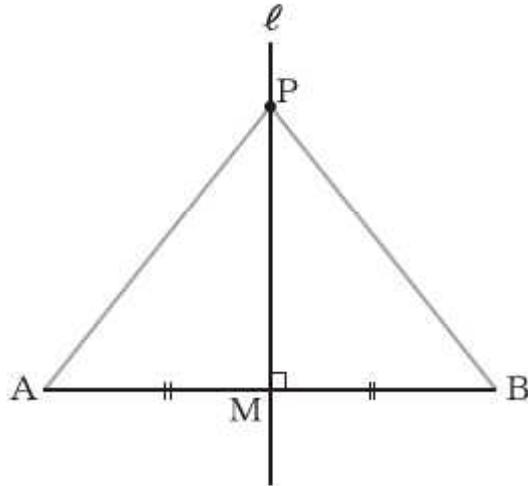
中学校

年 組 号 氏名

 数学的な思考力・判断力・表現力をはぐくむ問題 年 組 号 氏名

全国学力・学習状況調査 B問題

- 1 下の図のように、線分ABの垂直二等分線をひいて、線分ABとの交点をMとします。また、直線 l 上に点Pをとります。【H19】



このとき、 $PA = PB$ となることを、下のように証明しましたが、この証明にはまちがいがあります。

証明

$\triangle PAM$ と $\triangle PBM$ において、
仮定から、

$$AM = BM \quad \dots\dots ①$$

$$PA = PB \quad \dots\dots ②$$

また、 $PM = PM$ (PMは共通) $\dots\dots ③$

①、②、③より、

3辺がそれぞれ等しいから、

$$\triangle PAM \equiv \triangle PBM$$

したがって、 $PA = PB$

全国学力・学習状況調査 B問題

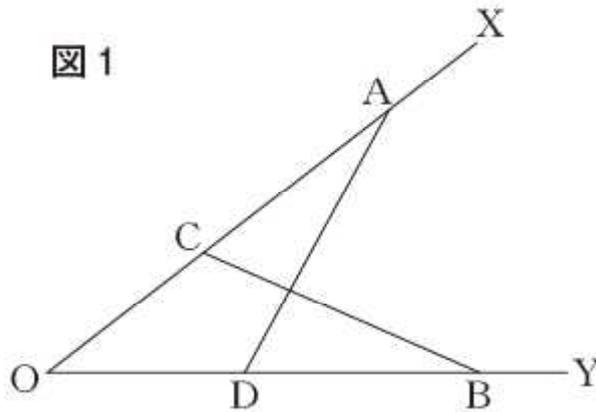
2 拓也さんは、次の問題を考えています。【H20】

問題

下の図1のように、 $\angle XOY$ の辺OXと辺OY上に、 $OA = OB$ となるように点Aと点Bを、 $OC = OD$ となるように点Cと点Dを、それぞれとります。

点Aと点D、点Bと点Cをそれぞれ結ぶとき、 $AD = BC$ となることを証明しなさい。

図1

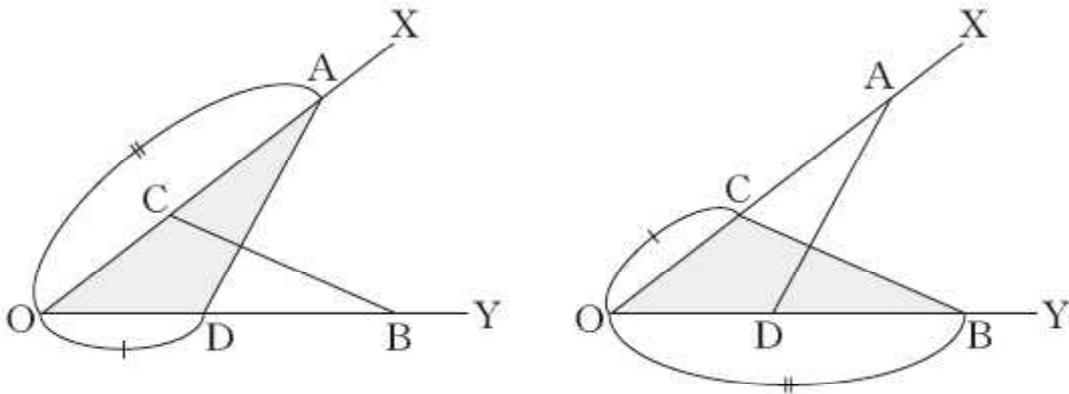


拓也さんは、証明の方針を下のようなメモにまとめました。

拓也さんのメモ

① $AD = BC$ を証明するためには、 $\triangle AOD$ と $\triangle BOC$ の合同を示せばよい。

② 図1の $\triangle AOD$ と $\triangle BOC$ を見やすくするために、2つの図に分けて、仮定を表すと、下のようになる。



③ ②をもとにすると、 $\triangle AOD$ と $\triangle BOC$ の合同が示せそうだ。

次の(1)から(3)までの各問いに答えなさい。

(1) 拓也さんのメモの ① にあるように、 $AD = BC$ を証明するために、 $\triangle AOD$ と $\triangle BOC$ の合同を示せばよいのは、合同な図形のどのような性質からですか。下のアからエの中から1つ選びなさい。

ア 合同な図形の対応する辺の長さは等しい。

イ 合同な図形の対応する角の大きさは等しい。

ウ 合同な図形の周の長さは等しい。

エ 合同な図形の面積は等しい。

(2) 前ページの問題で、 $AD = BC$ となることを証明しなさい。

(3) 拓也さんは、 $AD = BC$ を、 $\angle AOD = \angle BOC$ をもとにして証明しました。

$\angle AOD = \angle BOC$ をもとにすると、前ページの問題の図形について、 $AD = BC$ 以外に新しいことが分かります。それを下のアからエの中から1つ選びなさい。

ア $OC = OD$

イ $OC = BD$

ウ $\angle OAD = \angle OBC$

エ $\angle OAD = \angle BOC$

 数学的な思考力・判断力・表現力をはぐくむ問題 年 組 号 氏名

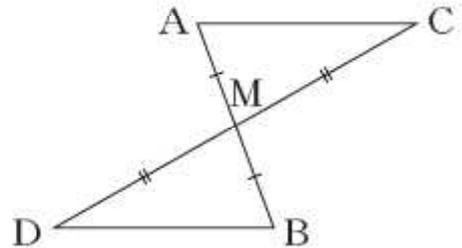
全国学力・学習状況調査 B問題

3 大貴さんは、次の問題を考えています。【H21】

問題

右の図のように、線分ABと線分CDがそれぞれの中点Mで交わっています。

このとき、 $AC \parallel DB$ となることを証明しなさい。



次の(1)から(3)までの各問いに答えなさい。

- (1) 大貴さんは、次のような証明の方針1を考えました。この証明の方針1にもとづいて、 $AC \parallel DB$ となることの証明を完成しなさい。

証明の方針1

- ① $AC \parallel DB$ を証明するためには、 $\angle MAC = \angle MBD$ (錯角が等しい)を示せばよい。
- ② $\angle MAC = \angle MBD$ を示すためには、 $\triangle AMC \equiv \triangle BMD$ を示せばよい。
- ③ 仮定の $AM = BM$, $CM = DM$ を使うと、 $\triangle AMC \equiv \triangle BMD$ が示せそうだ。

証明

$\triangle AMC$ と $\triangle BMD$ において,

合同な三角形の対応する角は等しいから,

$$\angle MAC = \angle MBD$$

したがって, 錯角が等しいから,

$$AC \parallel DB$$

(2) 大貴さんは, $\triangle AMC$ $\triangle BMD$ をもとにして $AC \parallel DB$ を証明しました。

$\triangle AMC$ $\triangle BMD$ をもとにすると, 前ページの問題の図形について,

$\angle MAC = \angle MBD$ や問題の仮定以外にも分かることがあります。それを下のアからエの中から 1 つ選びなさい。

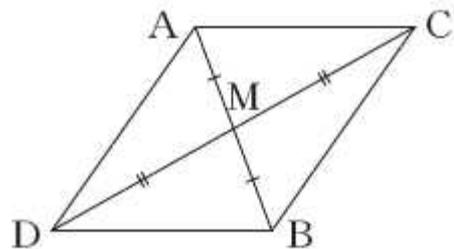
ア $\angle MCA = \angle MDB$

イ $\angle MAC = \angle MDB$

ウ $AM = BM$

エ $AM = DM$

(3) 右の図のように, 線分 AD , 線分 CB をひいて四角形 $ADBC$ をつくと, 次の証明の方針 2 を考えることもできます。



証明の方針2

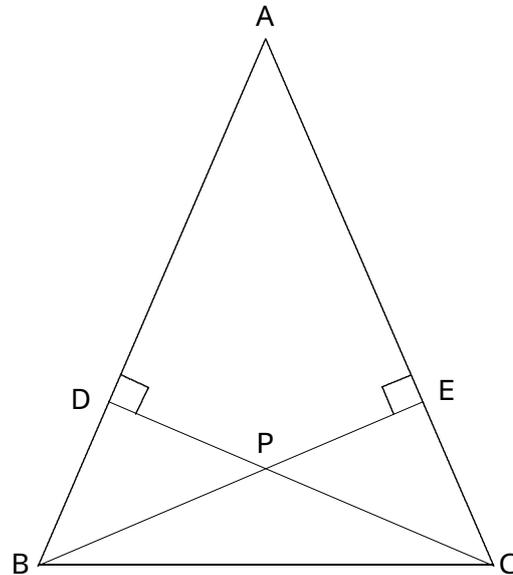
- ① $AC \parallel DB$ を証明するためには、四角形ADBCが
 (①)であることを示せばよい。
- ② このことは、仮定の $AM = BM$, $CM = DM$ を使うと、
 ② ことから示せる。

証明の方針2の()に当てはまる言葉を書きなさい。また、 に当てはまること
 とがらを、下のアからオの中から1つ選びなさい。

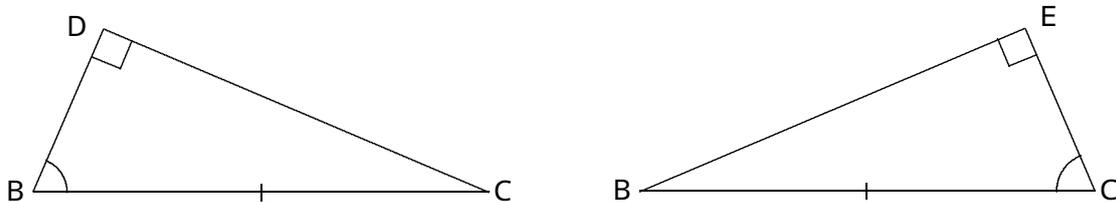
- ア 対角線が垂直に交わる
- イ 対角線の長さが等しい
- ウ 対角線が平行である
- エ 対角線がそれぞれの中点で交わる
- オ 対角線が垂直に交わり、その長さが等しい

練習問題

- 1 $AB = AC$ の二等辺三角形 ABC で、 C から AB に垂線をひき AB との交点を D 、同様に B から AC に垂線をひき AC との交点を E とします。また、 CD と BE の交点を P とします。このとき、 $CD = BE$ であることを証明します。あとの問いに答えなさい。



- (1) DBC と ECB に着目して証明することにしました。



まず、辺や角が等しいものを書き出してみました。

辺について……… BC は共通

角について……… $CDB = BEC = 90^\circ$

・二等辺三角形の底角は等しいから、 $DBC = ECB$

このことを参考に、証明を完成させなさい。

(2) (1)とは別の三角形に着目して、証明することにしました。ACDと ABEに着目して、 $CD = BE$ であることを証明しなさい。

(3) この問題で、 $CD = BE$ は常にいえることが分かりました。このこと以外で、他のすべての二等辺三角形ABCでもいえることを、次のアからオの中から1つ選びなさい。

ア PはCD, BEのそれぞれの中点である。

イ CDとBEはそれぞれ Bと Cの二等分線である。

ウ ACDと ABEは直角二等辺三角形である。

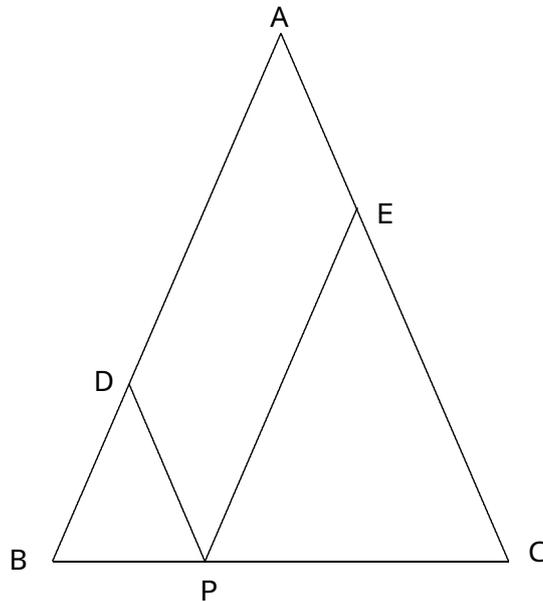
エ DBPと ECPは二等辺三角形である。

オ PBCは二等辺三角形である。

 数学的な思考力・判断力・表現力をはぐくむ問題 年 組 号 氏名

練習問題

- 2 $AB = AC$ の二等辺三角形 ABC で、辺 BC 上に点 P をとり（頂点 B, C とは異なるものとします）、 P を通過して AC に平行な線をひいて AB と交わる点を D 、 P を通過して AB に平行な線をひいて AC と交わる点を E とします。あとの問いに答えなさい。



- (1) 太郎さんは、 DBP が二等辺三角形になることを証明しました。証明を完成させなさい。



DBPで、 $DP \parallel AC$ より、
同位角が等しいので、
 $\angle DPB = \angle C$ ……



(2) 花子さんは、四角形ADPEが平行四辺形になることを証明しました。証明を完成させなさい。



四角形ADPEで、仮定より、
 $DP \parallel AE$



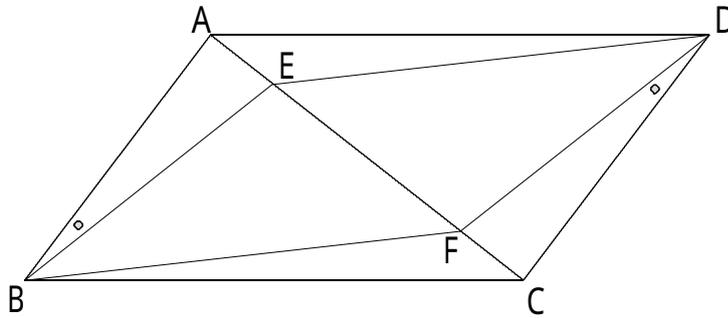
(3) 太郎さんと花子さんは、お互いの証明を見て、あることに気付きました。2人の証明から分かることで、正しいものを次のアからオの中から1つ選びなさい。

- ア 点Pのとり方によらず、四角形ADPEはひし形になる。
- イ 点PがBCの中点のときは、2つの三角形、DBPとEPCは正三角形になる。
- ウ いつも四角形ADPEの面積は、DBPとEPCの面積の和になる。
- エ いつも四角形ADPEの周りの長さは、ABの長さの2倍になる。
- オ いつも四角形ADPEの周りの長さと、ABCの周囲の長さは等しくなる。

練習問題

3 けいたさんとかりんさん、たくみさんは、次の問題を考えています。

下の図のような平行四辺形 $ABCD$ で、 $\angle ABE = \angle CDF$ ならば
四角形 $EBFD$ は平行四辺形であることを証明しなさい。



下の(1)から(3)の各問いに答えなさい。



まず、 $\angle ABE$ と $\angle CDF$ が合同であることを証明しよう。

それができたら、 $BE = DF$ が成り立つことが分かるわ。



(1) $\angle ABE$ と $\angle CDF$ が合同であることを証明しなさい。



次に， AEDと CFBが合同であることを証明しよう。



それもできたら， ED = FBが成り立つことが分かるね。



AEDと CFBが合同であることを証明するのに，
下のア，イが分からないなよ。



大丈夫よ， ABE CDFから，新しく分かることがあるわ。

(2) けいたさんは， AEDと CFBが合同であることを，次のように証明しました。

【証明】

	AEDと CFBで	
ABCDより，	DA = BC
AD//BCより，	DAE = BCF
ABE CDFより，	<div style="border: 1px dashed black; padding: 5px; display: inline-block;">ア</div>
， ， より	<div style="border: 1px dashed black; padding: 5px; display: inline-block;">イ</div>	
したがって	AED CFB	
	ED = FB	

上のア，イにあてはまる記号や言葉を書きなさい。

(3) たくみさんは、上の問題を次のように考えました。



ABEとCDFの合同を証明し、 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$ より新しく分かることから利用すると、 $\angle BEF = \angle DFE$ が成り立つことがいえるよ。

たくみさんの考え方より、四角形EBFDは平行四辺形になることが分かります。下の平行四辺形になる条件のどの条件を利用していますか、アからオの中から、記号で選びなさい。

- ア 2組の向かい合う辺が、それぞれ平行であるとき
- イ 2組の向かい合う辺が、それぞれ等しいとき
- ウ 2組の向かい合う角が、それぞれ等しいとき
- エ 対角線がそれぞれの中点で交わる時
- オ 1組の向かい合う辺が等しくて平行であるとき